** المعادلات التفاضلية التامة وإيجاد عامل التكامل

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

لتكن المعادلة:

1- تكون تامة إذا $P'_y = Q'_x$

2- نأخذ تكامل

$\int P(x,y)\,dx = \ldots$

$\int Q(x,y)\,dy = \ldots$ $\Rightarrow$ نأخذ أجزاء لحلول

* مثال * ● برهن أن المعادلة تامة ثم أوجد حلها:

$\cos y\,dx + (2y - x\sin y)\,dy = 0$

$P'_y = Q'_x = -\sin y$ فهي تامة

$P = \int \cos y\,dx = x\cos y$

$Q = \int (2y - x\sin y)\,dy = y^2 + x\cos y$

$x\cos y + y^2 = c$ الحل:

** لإيجاد عامل التكامل $M(x)$ ، $M(y)$

$M(x) = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}\,dx}$ ، $M(y) = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{-P}\,dy}$

● حل المعادلة التفاضلية بإيجاد عامل التكامل:

$(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0$

$P'_y = 2y \neq Q'_x = x \Rightarrow$ فهي غير تامة نستخدم عامل التكامل

$\frac{P'_y - Q_x}{Q} = \frac{2y - 0}{y} = 2 \Rightarrow$ يكون تابع لـ x

$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$

نضرب طرفي المعادلة ÷

$e^x (x^2 + y^2 + x)\, dx + e^{2x}\, dy = 0$

$P = e^{3x}(x^2 + y^2 + x) \Rightarrow P'y = 2y e^{2x}$

$q = y e^{2x} \Rightarrow q'x = 2y e^{2x}$

$\Rightarrow P'y = q'x$ معي تامة

$\int Py =$

$\int Px =$

حالة المعادلة التفاضلية تامة وأوجد حلها:

* اثبت أن المعادلة التفاضلية تامة ثم أوجد حلها:

$\left(\frac{y}{x^2} - 2x\right) dx + \frac{1}{x}\, dy = 0$

$P'y = \frac{1}{x^2}$ ، $q'x = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow q'x + P'y$

معي غير تامة نأخذ عامل التكامل

$\mu(x) = e^{\int \frac{P'y - q'x}{q}}$

$\frac{P'y - q'(x)}{q} = \frac{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln x}$ $= \frac{2}{x}$

عوض تابع لـ x

$(y - 2x^2)\, dx + x\, dy = 0$

$P'y = 1$ ، $q'x = 1 \Rightarrow P'(y) = q'(x)$

معادلة تامة في ناقصة نكامل:

$P_x = \int (y - 2x^2) = yx - \frac{x^4}{2}$

$q = \int x\, dy = xy$

$\Big\} \; yx - \frac{x^4}{2} = c$

* حل المعادلة التفاضلية بعد أن تثبت أنها غير تامة:

$(y + xy^2)\, dx - x\, dy = 0$

$P(x) = y + xy^2$ ، $q' = -x$

$q(y) = 1 + 2yx$ ، $P' = -1$

$\Big\} \Rightarrow -P'(y) \neq q'(x)$ معي غير تامة

$\mu(y) = e^{\int \frac{P'y - q'x}{-P}}$

$\frac{P'y - q'x}{-P} = \frac{1 + 2xy}{-y - xy^2}$

$\frac{2(1 + xy)}{-y(1 + xy)} = \frac{2}{-y}$

ونضرب به ونكامل

معي تامة (y

السطح الدوراني :

• مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران الدالة $y=f(x)$ حول المحور ox حيث $a < x < b$ تعطى المساحة بالعلاقة :

$$* \; S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \; *$$

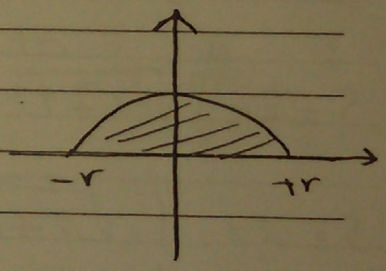
• اذا كان المنحني معرفاً بمعادلتي الوسيط $x=f(t)$ ، $y=g(t)$ فإن مساحة السطح حول ox تعطى بالعلاقة :

$$* \; S = 2\pi \int_{T_1}^{T_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \; *$$

مثال :

احسب مساحة السطح الناتج عن دوران دائرة للمحور ox حيث $y=\sqrt{r^2-x^2}$ و $x^2+y^2=r^2$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$



$$S = 2\pi \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx$$

$$= 2\pi r \left[x\right]_{-r}^{r} = 2\pi r \left[r+r\right] = 4\pi r^2$$

معادلة الدائرة بالمحاور

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta$ $\quad$ $\frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta$

$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = r^2\sin^2\theta$ $\quad$ $\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = r^2\cos^2\theta$

$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = r^2\sin^2\theta + r\cos^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= r^2$

$S = 2\pi \int_0^{\pi} r\sin\theta \Rightarrow 2\pi r^2 \int \sin\theta = 2\pi r^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$

$= 2\pi r^2 (1+1) = 4\pi r^2$

١٠ ● اب بمساعدة التكامل المحدد أثبت أن مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران الدالة $y = \sin x$ حيث $0 \le x \le \pi$ حول المحور السيني:

$S = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\sqrt{1+\cos^2 x'}\, dx$

نفرض $t = \cos x$ $\Leftarrow$ $dt = -\sin x\, dx$

$t = 1 \Leftarrow x = 0$

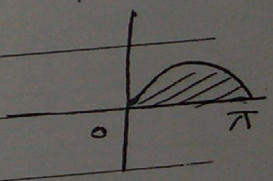
$t = -1 \Leftarrow x = \pi$

$S = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt$

نفرض $t = \sinh\theta$

$S = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt$

$S = \pi\left[2\sqrt{2} + \ln(3+\sqrt{2})\right]$



حساب طول منحنى معطى بالمعادلات الوسيطية

$y = f(t)$ ، $x = g(t)$ حيث $t_1 \le t \le t_2$ يعطى طول المنحنى بالمعادلة

$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(t)^2 + f(t)^2}\, dt$

أ- إذا كان المنحنى معطى بالمعادلات القطبية $r = f(\theta)$

طول القوس بالاحداثيات القطبية

$\alpha \le \theta \le \beta$ حيث $r = f(\theta)$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$$

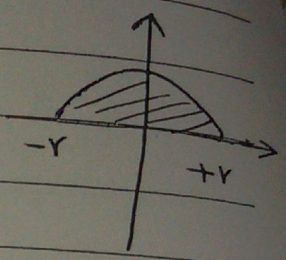
مثال

أوجد طول قوس الدائرة $x^2 + y^2 = R^2$

$$y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad , \quad y'^2 = \frac{x^2}{r^2 - x}$$

$$1 + y'^2 = \frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}$$



$$L = R \int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \left[R \arcsin \frac{x}{R} \right]_{-r}^{r}$$

$$= R \left[\arcsin 1 - \arcsin(-1) \right]$$

$$R \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi \right) = 2\pi R$$

تذكير

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

الحجوم الدورانية

1. حساب الحجم الناشئ عن دوران مساحة محدودة بمنحني $y=f(x)$ والمحور ox والمستقيمين $x_1=a$ ، $x_2=b$

$$* V=\pi \int_a^b f^2(x)\,dx *$$

2. حجم حجم دوراني حول محور المفواصل محصور بين منحني التابع $f(x)$ ، $g(x)$ حيث $g(x) \geq f(x)$

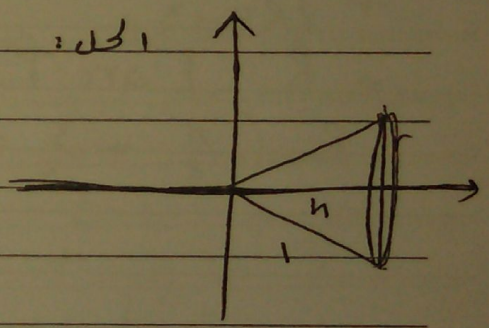
$$V=\pi \int_a^b (g(x)^2 - f(x)^2)\,dx$$

مثال (1)

اوجد حجم المخروط الدوراني الناتج عن دوران مثلث قائم قاعدته r وارتفاعه h

الحل: حيث $y=mx$ ⇐ أن مارا مبدأ الإحداثيات

$$M=\tan\theta \Rightarrow y=\frac{r}{h}x$$



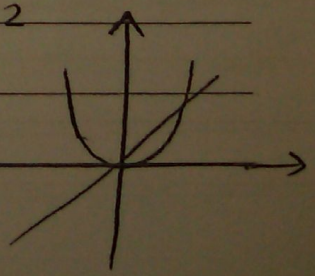
$$V=\int_0^h \frac{r}{h}x^2\,dx \Rightarrow V=\frac{r^2}{3h^2}\left[x^3\right]_0^h$$

$$=\frac{\pi r^2 h^3}{3h}=\frac{\pi r^2 h}{3}$$

مثال (2) اوجد حجم الجسم الدوراني المتشكل من المنطقة المحصورة بالمنحني $y=x^2$ ، حول محور المفواصل

⇐ بالحل المشترك $x^2=2x$

$$x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \text{ أو } x=2$$

$$V=\pi \int_0^2 4x^2 - \int_0^2 x^4\,dx$$

ومتابع الحل